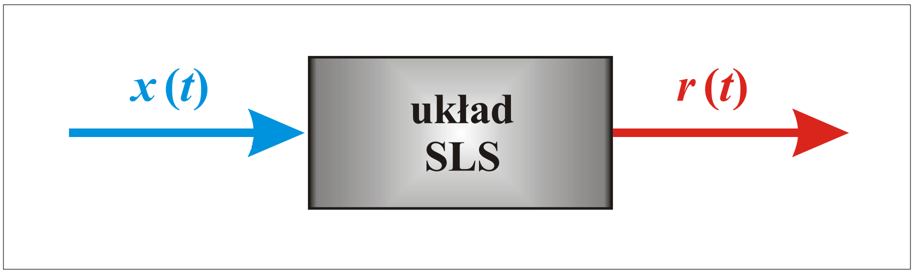
15. STANY NIEUSTALONE W OBWODACH SLS

15.1. WPROWADZENIE

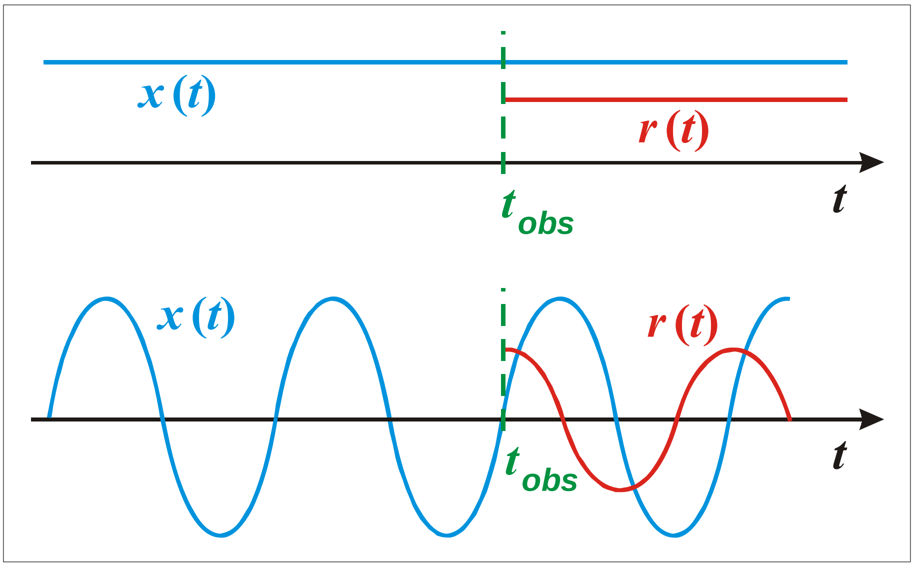
Rozpatrzmy układ SLS, na który działamy zdeterminowanym **wymuszeniem** $x(t)$ określonym dla $t \in (-\infty, +\infty)$.

Jeśli interesuje nas funkcja określonej wielkości fizycznej w tym układzie, to możemy nazywać ją **odpowiedzią** $r(t)$ układu na istniejące wymuszenie $x(t)$ – rys.15.1.



Rys.15.1.

Dotychczas rozpatrywaliśmy obwody w **stanie ustalonym** - co oznaczało, że moment włączenia źródła wymuszającego do obwodu był nieskończenie odległy od momentu obserwacji. Wówczas wszystkie napięcia i prądy występujące w obwodzie miały ten sam charakter, co wymuszenie - rys.15.2.



Rys.15.2.

Jeśli w jakimś momencie czasu (t_k) nastąpi

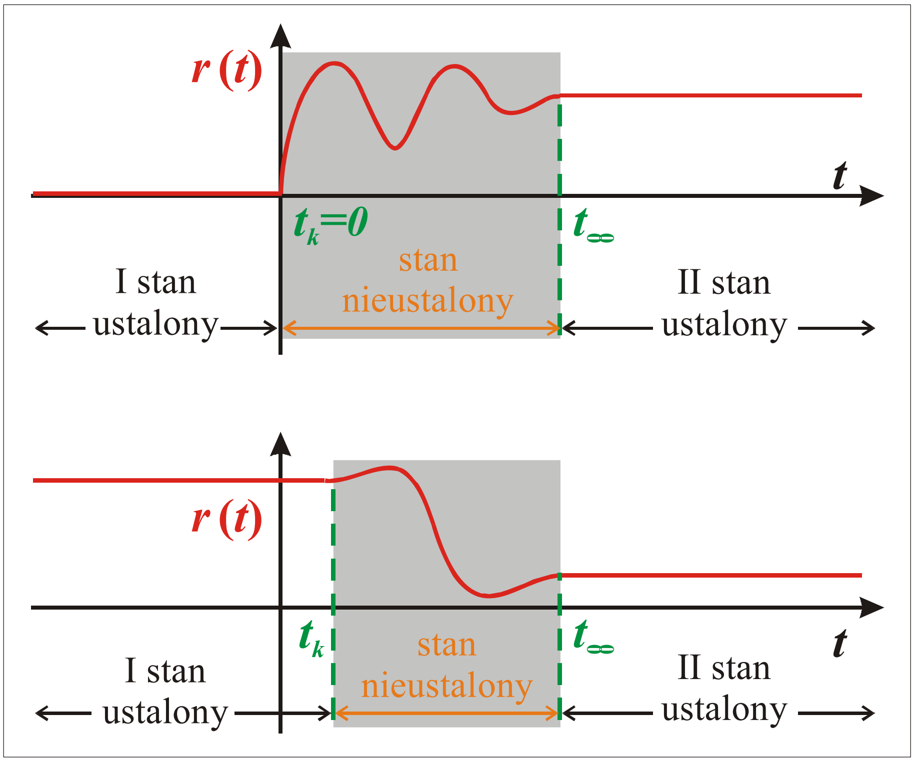
dowolna zmiana warunków pracy układu

KOMUTACJA

- **zmiana sygnału wymuszającego** (np. zmiana parametrów sygnału, w tym także załączenia lub wyłączenia)
- **zmiana struktury obwodu** (np. odłączenie elementu, dołączenie elementu dodatkowego)
- **zmiana parametrów obwodu**

to nowe warunki wymuszają oczywiście inną funkcję odpowiedzi układu, czyli inny stan ustalony.

Przejście od jednego stanu ustalonego do drugiego - przejście zapoczątkowane w chwili komutacji (t_k) - trwa pewien określony czas, który nazywamy czasem trwania stanu nieustalonego (t_∞) a stan układu, w którym znajduje się on w przedziale czasu $[t_k, t_\infty]$, nazywamy **STANEM NIEUSTALONYM** (odpowiedź ma charakter różny od wymuszenia) – rys.15.3.



Rys.15.3.

Przyjmujemy założenie, że czas trwania komutacji jest równy zeru, tzn. wszystkie zmiany odbywają się bezzwłocznie.

15.2. PRAWA KOMUTACJI, WARUNKI POCZĄTKOWE

Komutacja **może** być przyczyną występowania **skokowych** zmian prądów i napięć w obwodzie. Istnieją jednak ograniczenia, którym podlega każdy obwód. Wynikają one z faktu, iż w realnych obwodach moc chwilowa nie może być nieskończenie wielka

$$p(t) = \frac{d\,W(t)}{dt} \quad < \infty \tag{15.1}$$

co oznacza ciągłość funkcji energii – ciągłość ta musi występować również w chwili komutacji.

Na podstawie **zasady ciągłości energii** w obwodzie oraz pamiętając, że wartość energii nagromadzonej

w polu magnetycznym cewki o indukcyjności L, przez którą przepływa prąd i_L wynosi (2.8) $W_L(t) = \frac{1}{2} L\, i_L^{\,2}(t)$	w polu elektrycznym kondensatora o pojemności C, naładowanego do napięcia u_C wynosi (2.5) $W_C(t) = \frac{1}{2} C\, u_C^{\,2}(t)$

Możemy sformułować dwa prawa komutacji:

Pierwsze prawo komutacji

Prąd płynący przez cewkę nie może ulec skokowej zmianie, co oznacza, że prąd cewki w chwili tuż po komutacji równa się prądowi tuż przed komutacją

$$\boxed{i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right)} \tag{15.2}$$

Drugie prawo komutacji

Napięcie na kondensatorze nie może zmienić się skokowo, co oznacza, że napięcie na kondensatorze w chwili tuż po komutacji jest równe napięciu tuż przed komutacją

$$\boxed{u_C\left(0^+\right) = u_C\left(0^-\right)} \tag{15.3}$$

UWAGA: Nie ma żadnych przesłanek wykluczających skokowe zmiany pozostałych wielkości w obwodzie, tzn.: napięć na cewkach, prądów kondensatorów lub też prądów i napięć rezystorów.

Zakładając, że chwilę komutacji uważać będziemy za chwilę początkową (t_K=0) analizy obwodu w stanie nieustalonym, istotne jest wyznaczenie warunków początkowych procesu.

Warunki początkowe stanowi zbiór wartości prądów w indukcyjnościach i napięć na pojemnościach układu w chwili początkowej. Warunki początkowe określają całkowitą wartość energii zgromadzonej w układzie w chwili t_K=0.

Wyznaczenie warunków początkowych w obwodzie wiąże się z:

- rozwiązaniem stanu ustalonego obwodu przed komutacją,
- określeniem postaci czasowej tego rozwiązania na prądy cewek i napięcia kondensatorów,
- wyznaczeniem rozwiązania odpowiadającego chwili czasowej komutacji.

Oznacza to, iż podstawą do ustalenia warunków początkowych obwodu są prawa komutacji.

UWAGA: Warunki początkowe mogą być (i często są) zerowe!

15.3. ANALIZA STANÓW NIEUSTALONYCH

W celu zbadania zmian wartości danej wielkości obwodu (prądu, napięcia) w stanie nieustalonym stosuje się w praktyce jedną z dwóch metod: **metodę klasyczną** bądź **metodę operatorową**.

Wyznaczenie rozwiązań obwodów SLS w stanie nieustalonym

Metoda klasyczna

polegająca na bezpośrednim rozwiązaniu równań różniczkowych (zwyczajnych, liniowych o stałych współczynnikach) opisujących obwód

Metoda operatorowa

wykorzystująca właściwości ***przekształcenia Laplace'a***.

15.4. METODA KLASYCZNA

Modelem matematycznym obwodu elektrycznego klasy SLS, o dowolnej konfiguracji, jest układ równań różniczkowo-całkowych, wynikających z praw Kirchhoffa i definicji elementów R, L i C. W celu wyznaczenia poszukiwanych prądów i napięć wszystkie równania należy sprowadzić do układu równań różniczkowych o postaci ogólnej

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,r_1(t)}{dt} &= a_{11}r_1(t)+a_{12}r_2(t)+\ldots+a_{1n}r_n(t)+f_1(t)\\ \frac{d\,r_2(t)}{dt} &= a_{21}r_1(t)+a_{22}r_2(t)+\ldots+a_{2n}r_n(t)+f_2(t)\\ &\vdots\\ \frac{d\,r_n(t)}{dt} &= a_{n1}r_1(t)+a_{n2}r_2(t)+\ldots+a_{nn}r_n(t)+f_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

gdzie: $r_1(t)$ ... $r_n(t)$ – zmienne oznaczające prądy cewek lub napięcia kondensatorów (tzw. zmienne stanu); stałe współczynniki a_{ij} stanowią kombinację wartości parametrów R, L, C; funkcje czasu $f_1(t)$ ... $f_n(t)$ związane z wymuszeniami $x_1(t)$ ... $x_n(t)$; liczba równań n zależy od liczby reaktancji w obwodzie.

Rozwiązując układ równań z uwagi na poszukiwaną funkcję odpowiedzi $r(t)$ przy znanym wymuszeniu $x(t)$ otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe o stałych współczynnikach n-tego rzędu o postaci:

$$\boxed{a_n\frac{d^n\,r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\,r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\,r(t)}{dt}+a_0\,r(t)=x(t)} \tag{15.5}$$

Rozwiązaniem równania (15.5) określającym analityczną postać odpowiedzi $r(t)$ jest tak zwana całka ogólna równania niejednorodnego ($C.O.R.N.$)

$$r(t)=C.O.R.N. \tag{15.6}$$

Teoria równań różniczkowych mówi, że jest ona sumą dwóch składowych: całki ogólnej równania jednorodnego ($C.O.R.J.$) i całki szczególnej równania niejednorodnego ($C.S.R.N.$). Zatem

$$r(t) = C.O.R.N. = C.O.R.J. + C.S.R.N. \tag{15.7}$$

C.O.R.J.	C.S.R.N.
składowa odpowiedzi **niezależna** od wymuszenia	składowa odpowiedzi **wywołana** przez wymuszenia
oznaczana $r_S(t)$ i nazywana **składową swobodną** (przejściową) odpowiedzi	oznaczana $r_W(t)$ i nazywana **składową wymuszoną** (ustaloną) odpowiedzi

Czyli:

$$r(t) = r_S(t) + r_W(t) \tag{15.8}$$

Składowa swobodna $r_S(t)$ opisuje procesy zachodzące w obwodzie na skutek niezerowych warunków początkowych przy braku wymuszeń zewnętrznych. Składowa przejściowa zależy jedynie od warunków początkowych, struktury obwodu i wartości parametrów tego obwodu. Cechą charakterystyczną $r_S(t)$ jest jej zanikanie z biegiem czasu do zera

$$\lim_{t\to+\infty}\left[r_S(t)\right]=0 \tag{15.9}$$

Składowa wymuszona $r_W(t)$ opisuje stan ustalony w obwodzie przy działającym wymuszeniu, może być zatem łatwo wyznaczona dowolną z poznanych metod analizy obwodów.

Równanie składowej swobodnej $r_S(t)$ otrzymuje się zakładając wymuszenie $x(t)$ we wzorze (15.5) równe zeru i zastępując zmienną $r(t)$ poprzez jej składową swobodną $r_S(t)$

$$a_n\frac{d^n r_S(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} r_S(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\,r_S(t)}{dt}+a_0\,r_S(t)=0 \tag{15.10}$$

Rozwiązanie równania jednorodnego (10.10) uzyskuje się za pośrednictwem równania charakterystycznego, które ma postać

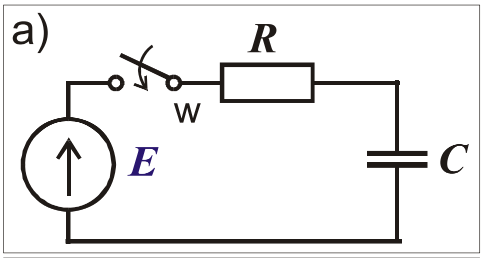
$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0=0 \tag{15.11}$$

jeśli wielomian ten posiada tylko pierwiastki pojedyncze s_i (i=1,2, ... n), to

$$r_S(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i\,e^{s_i t} \tag{15.12}$$

gdzie współczynniki A_i (i=1,2, ... n) są stałymi całkowania, których wartości wyznacza się w oparciu o znajomość warunków początkowych.

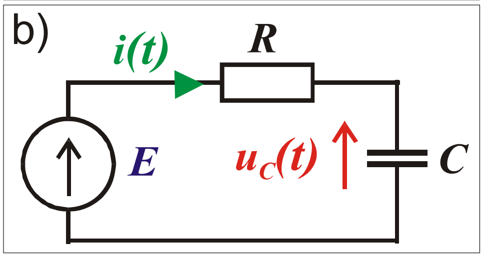
PRZYKŁAD 15.1



Rozpatrzymy stan nieustalony w obwodzie szeregowym *RC* przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego *E* (rys.a).

Zerowe warunki początkowe oznaczają, że

$$u_C(0^-)=0$$



Po przełączeniu wyłącznika *w* powstaje w obwodzie stan nieustalony. Schemat obwodu dla stanu nieustalonego ma postać przedstawioną na rys.b.

Stosując prawo napięciowe Kirchhoffa dla tego obwodu możemy napisać

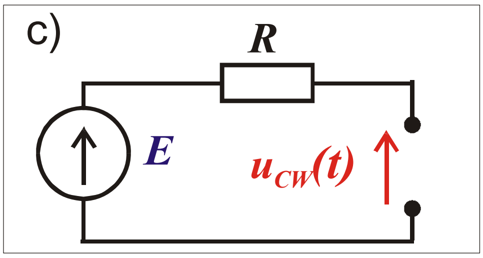
$$E-R\,i(t)-u_C(t)=0$$

i uwzględniając, że $i(t)=C\dfrac{d\,u_C(t)}{dt}$ otrzymujemy równanie różniczkowe niejednorodne o postaci [patrz (15.5)]

$$\boxed{RC\frac{d\,u_C(t)}{dt}+u_C(t)=E}$$

<u>Stan nieustalony jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego</u>.

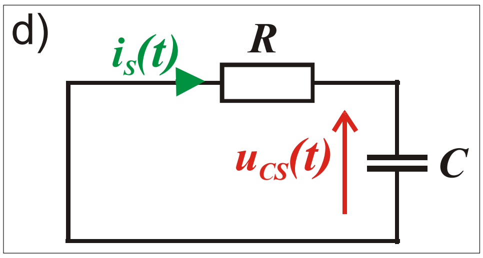
$$\boxed{u_C(t)} = \boxed{u_{CS}(t)} + \boxed{u_{CW}(t)}$$



Stan ustalony przy wymuszeniu stałym oznacza, że kondensator stanowi przerwę (rys.c).

Zgodnie z NPK napięcie ustalone kondensatora jest równe

$$u_{CW}(t)=E$$



Schemat obwodu dla stanu przejściowego (po zwarciu źródła napięciowego) - rys.d.

Dla tego obwodu otrzymujemy równanie różniczkowe jednorodne o postaci [patrz (15.10)]

$$RC\frac{d\,u_{CS}(t)}{dt}+u_{CS}(t)=0$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Równanie charakterystyczne można zapisać jako [patrz (15.11)]

$$RC\,s + 1 = 0$$

Równanie to posiada jeden pierwiastek s_1=-1/RC. W związku z powyższym jego rozwiązanie wynikające ze wzoru (15.12) przyjmuje uproszczoną postać

$$u_{CS}(t) = A_1\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

W rozwiązaniu tym współczynnik A_1 jest stałą całkowania, której wartość wyznaczamy w oparciu o znajomość warunków początkowych.

Rozwiązanie ostateczne, będące sumą składowej wymuszonej i swobodnej przybiera postać [patrz (15.8)]

$$u_C(t) = u_{CW}(t) + u_{CS}(t) = E + A_1\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ponieważ drugie prawo komutacji mówi, że $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ stąd wobec $u_C(0^-) = 0$ otrzymujemy

$$0 = E + A_1 \quad \text{oraz} \quad A_1 = -E$$

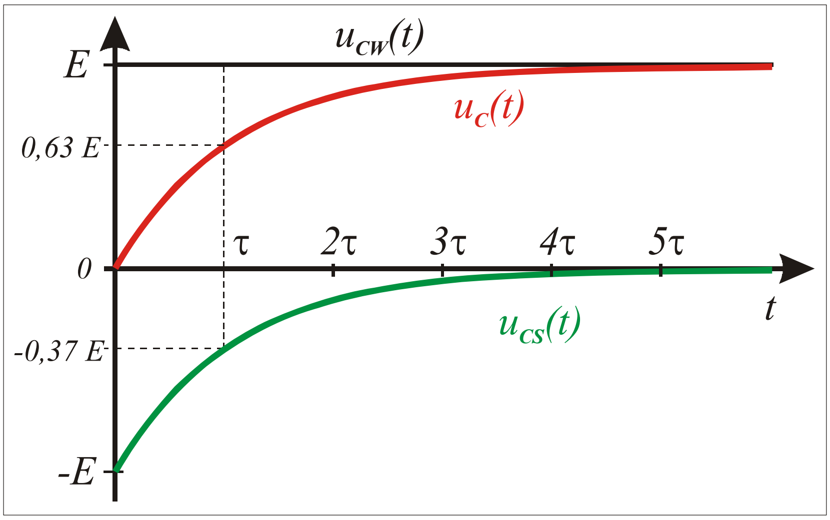
Czyli rozwiązanie czasowe określające przebieg napięcia na kondensatorze przyjmuje postać

$$u_C(t) = E - E\, e^{-\frac{t}{RC}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\boxed{r(t)} = \boxed{r_S(t)} + \boxed{r_W(t)}$$

$$\boxed{u_C(t)} = \boxed{-E\, e^{-\frac{t}{RC}}} + \boxed{E}$$

$$\boxed{u_C(t)} = \boxed{-E\,e^{-\frac{t}{RC}}} + \boxed{E}$$



Miarą prędkości zmian przebiegów nieustalonych w obwodzie może być stała czasu obwodu.

Stała czasu τ obwodu jest to czas, po którym wartość bezwzględna składowej swobodnej odpowiedzi maleje *e*-krotnie.

Stała czasu rozpatrywanego obwodu *RC* wyraża się iloczynem rezystancji *R* i pojemności *C*

$$\tau = RC$$

Z teoretycznego punktu widzenia obwód osiąga stan ustalony po czasie nieskończonym.

Praktycznie jednak stan ustalony następuje wówczas, gdy składowa swobodna jest do pominięcia
w stopniu zależnym od żądanej dokładności (tabela 1)

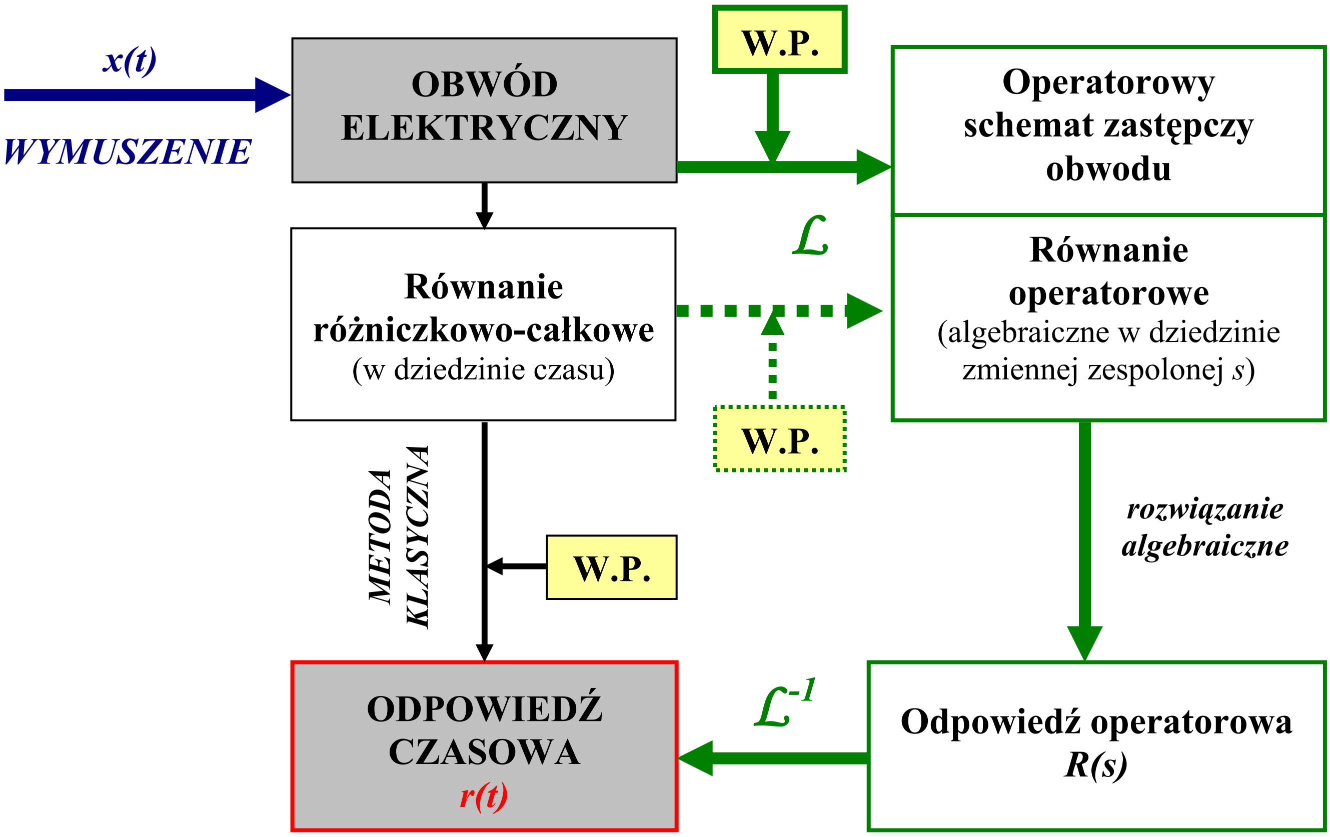
Tablica 1.

t	1τ	2τ	3τ	4τ	$4{,}6\tau$	5τ
$\frac{r_S(t)}{A_1}100\%$	36,8	13,5	5	1,8	1	0,7
$\frac{r(t)}{r_W(t)}$	0,632	0,865	0,95	0,982	0,99	0,993

15.5. METODA OPERATOROWA

Bardziej efektywną metodą od metody klasycznej jest metoda operatorowa – jej efektywność polega na „algebraizacji” równania różniczkowego, przy czym warunki początkowe wchodzą niejako automatycznie do „zalgebraizowanego”. Mimo iż jest to okrężna droga rozwiązania, wynik uzyskujemy znacznie szybciej niż metodą bezpośrednią.

Schemat dokonywanych operacji



Aby biegle posługiwać się metodą operatorową musimy poznać:

1. Przekształcenia Laplace’a (transformaty sygnałów przyczynowych)
2. Podstawowe twierdzenia rachunku operatorowego
3. Schematy zastępcze i podstawowe prawa obwodów w rachunku operatorowym
4. Metody wyznaczania oryginału funkcji operatorowej

15.5.1. PRZEKSZTAŁCENIA LAPLACE'A

Rozpatrywać będziemy funkcję *f(t)* zmiennej rzeczywistej *t* spełniającą następujące warunki:

- funkcja *f(t)* jest określona dla *t* >0 i równa zeru, gdy *t* <0;
- wartość bezwzględna funkcji *f(t)* nie rośnie szybciej niż funkcja wykładnicza, gdy $t \to \infty$ ($|f(t)| \le M\, e^{bt}$ gdzie *M*>0 oraz *b*>0)

Przekształcenie, które przyporządkowuje funkcji *f(t)* zmiennej rzeczywistej *t*, funkcję *F(s)* będącą funkcją zmiennej zespolonej $s=\sigma+j\omega$ za pomocą zależności

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt} \tag{15.13}$$

nazywamy **prostym przekształceniem Laplace'a**
lub **$\mathcal{L}$-transformatą**

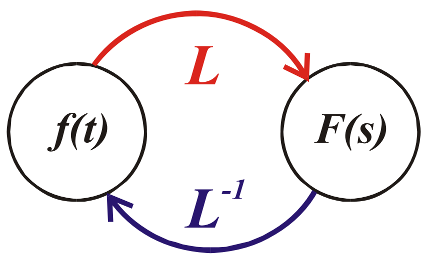
Funkcję *F(s)* zmiennej zespolonej *s* nazywamy **transformatą** funkcji ***f(t)***.

Wyznaczenie funkcji *f(t)* (nazywanej oryginałem) odpowiadającej znanej funkcji *F(s)* umożliwia odwrotne przekształcenie Laplace'a nazywane też $\mathcal{L}^{-1}$-transformatą

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]} \tag{15.14}$$

Przekształcenia Laplace'a wyrażone wzorami (15.13) i (15.14) są wzajemnie jednoznaczne, czyli

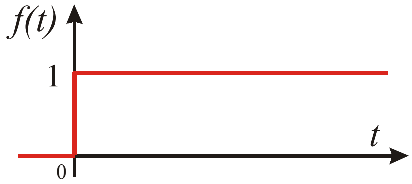
$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\} = f(t) \quad dla \quad t>0} \tag{15.15}$$



TRANSFORMATY SYGNAŁÓW PRZYCZYNOWCH

A) Funkcja jednostkowa

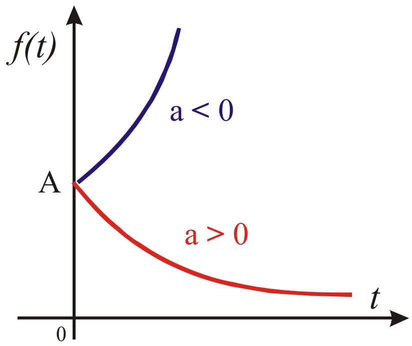
$$\boxed{f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t < 0 \\ 1 & dla \quad t > 0 \end{cases}}$$



$$F(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \int_0^\infty 1\, e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

B) Funkcja wykładnicza

$$\boxed{f(t) = A e^{-at} 1(t)}$$



$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty A e^{-at}\, e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-at}\, e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt =$$

$$= A \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^\infty = \frac{A}{s+a}$$

C) Funkcja harmoniczna

$$\boxed{f(t) = A \sin \omega t \cdot 1(t)}$$

$$F(s) = A \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t} dt =$$

$$= \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{-(s-j\omega)} e^{-(s-j\omega)t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{(s+j\omega)} e^{-(s+j\omega)t} \Big|_0^\infty \right] =$$

$$= \frac{A}{2j} \left[-\frac{1}{s-j\omega}(0-1) + \frac{1}{(s+j\omega)}(0-1) \right] = \frac{A}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{(s+j\omega)} \right) =$$

$$= \frac{A}{2j} \frac{s+j\omega - s + j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A}{2j} \frac{2j\omega}{s^2+\omega^2} = A \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Tablica 2. Transformaty Laplace'a wybranych funkcji

lp.	*f(t)*	*F(s)*
1	1	$\dfrac{1}{s}$
2	a	$\dfrac{a}{s}$
3	t	$\dfrac{1}{s^2}$
4	t^n, $n \in N$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
6	$t\,e^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at}$, $n \in N$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\dfrac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{1+s\tau}$
9	$\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\dfrac{1}{s(s+a)}$
10	$1-e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{s(1+s\tau)}$
11	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
12	$\dfrac{a e^{-at}-b e^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$

lp.	*f(t)*	*F(s)*
13	$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
14	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
15	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
16	$e^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)+\omega^2}$
17	$e^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s^2+\omega^2)+\omega^2}$
18	$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
19	$t \cos \omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
20	$sh\, \beta t$	$\dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$
21	$ch\, \beta t$	$\dfrac{s}{s^2-\beta^2}$
22	$e^{-at} sh\, \beta t$	$\dfrac{\beta}{(s+a)^2-\beta^2}$
23	$e^{-at} ch\, \beta t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2-\beta^2}$
24	$\delta(t)$	1

15.5.2. PODSTAWOWE TWIERDZENIA RACHUNKU OPERATOROWEGO

A) Twierdzenie o liniowości

Jeżeli funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ posiadają transformaty, tzn.

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]=F_1(s) \quad i \quad \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]=F_2(s)$$

to dla dowolnych liczb a oraz b zachodzi

$$\boxed{\mathcal{L}\left[a\,f_1(t)+b\,f_2(t)\right]=a\,F_1(s)+b\,F_2(s)} \qquad (15.16)$$

B) Twierdzenie o transformacie pochodnej

Jeśli funkcja $f(t)$ i jej pochodna $f\,'(t)$ są $\mathcal{L}$-transformowalne, to transformatę pochodnej możemy wyrazić przez transformatę samej funkcji następująco

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f\,'(t)\right]=s\,\mathcal{L}\left[f\,(t)\right]-f\,(0^+)=s\,F(s)-f\,(0^+)} \qquad (15.17)$$

gdzie: $f(0^+)$ – prawostronna granica funkcji $f(t)$ w punkcie $t=0$
(wartość początkowa funkcji $f(t)$)

Transformatę pochodnej n-tego rzędu funkcji $f(t)$ obliczamy ze wzoru

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n F(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} f^{(k)}(0^+) \qquad (15.18)$$

Jeśli warunki początkowe są zerowe to widać wyraźnie, że
<u>różniczkowanie</u> funkcji w dziedzinie czasu
<u>odpowiada mnożeniu</u> $\mathcal{L}$-transformaty samej funkcji przez s w potędze równej rzędowi pochodnej.

C) Twierdzenie o transformacie całki

Jeśli funkcja $f(t)$ jest $\mathcal{L}$-transformowalna, to transformatę całki możemy wyrazić przez transformatę samej funkcji następująco

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int f(t)\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0^+)}{s}} \qquad (15.19)$$

gdzie: $f^{(-1)}(0^+)$ *– oznacza wartość całki w chwili* $t=0^+$
(można ją rozumieć jako wartość początkową - warunek początkowy)

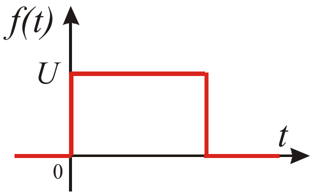
Jeśli warunek początkowy jest zerowy to
całkowanie funkcji w dziedzinie czasu
odpowiada dzieleniu $\mathcal{L}$-transformaty funkcji podcałkowej przez s

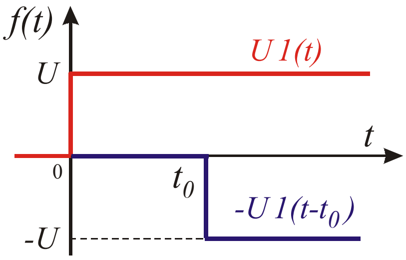
D) Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie rzeczywistej (czasu)

Jeżeli dana jest funkcja przyczynowa $f(t)1(t)$ $\mathcal{L}$-transformowalna o transformacie $F(s)$, to transformata funkcji przesuniętej $f(t-t_0)1(t-t_0)$ dla $t\geq 0$ określona jest następująco

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f_1(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right]=F(s)e^{-st_0}} \qquad (15.20)$$

Przykład: *Dana jest funkcja wymuszenia napięciowego w postaci impulsu prostokątnego. Należy wyznaczyć transformatę tej funkcji*





$$f(t)=\begin{cases} U & dla \quad t\leq 0<t_0 \\ 0 & dla \quad t_0<t<0 \end{cases}$$

inny opis

$$f(t)=U\cdot 1(t)-U\cdot 1(t-t_0)$$

Zgodnie z twierdzeniem o liniowości oraz o przesunięciu w dziedzinie czasu napiszemy:

$$F(s)=\mathcal{L}\left[U\cdot 1(t)-U\cdot 1(t-t_0)\right]$$

$$=\mathcal{L}\left[U\cdot 1(t)\right]-\mathcal{L}\left[U\cdot 1(t-t_0)\right]=\frac{U}{s}-\frac{U}{s}e^{-st_0}$$

E) Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie zmiennej zespolonej

Jeżeli $F(s)$ jest transformatą funkcji $f(t)$ oraz a jest dowolną liczbą zespoloną bądź rzeczywistą, to transformata o argumencie przesuniętym spełnia następującą zależność

$$\boxed{F(s+a) = \mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right]} \tag{15.21}$$

F) Twierdzenie o transformacie funkcji okresowej (o okresie T)

Jeżeli $f(t) = f(t+kT)$, k=1,2 ... ; to

$$\boxed{F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-st}}}$$

gdzie: $F_T(s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt$

15.5.3. PODSTAWOWE PRAWA I SCHEMATY ZASTĘPCZE OBWODÓW W RACHUNKU OPERATOROWYM

Najefektywniejszą drogą postępowania w metodzie operatorowej jest określenie transformat prądów i napięć bezpośrednio na podstawie obwodu bez konieczności układania równań różniczkowo całkowych. Aby to uzyskać należy opracować **operatorowy schemat zastępczy** danego obwodu - w tym celu każdy element obwodu zastępuje się odpowiednim modelem w dziedzinie operatorowej.

Modele operatorowe idealnych elementów obwodu określamy na podstawie:

- operatorowych zależności między napięciem i prądem elementu;
- praw Kirchhoffa w postaci operatorowej

I prawo Kirchhoffa

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, i_k(t) = 0$$

gdzie: $i_k(t)$ – natężenie prądu w k-tej gałęzi; K – liczba gałęzi dołączonych do danego węzła
λ_k – współczynnik o wartości 1 lub –1, zależnie od zwrotu prądu względem węzła

Po zastosowaniu do powyższego równania przekształcenia Laplace'a i wykorzystaniu twierdzenia o liniowości tego przekształcenia (15.16) otrzymujemy

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, I_k(s) = 0} \tag{15.22}$$

Równanie (15.22) wyraża **I prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej**

Algebraiczna suma transformat prądów we wszystkich gałęziach dołączonych do danego węzła schematu operatorowego jest równa zeru

II prawo Kirchhoffa

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j\, u_j(t) = 0$$

gdzie: $u_j(t)$ – napięcie na j-tym elemencie oczka; J – liczba elementów w oczku
λ_j – współczynnik o wartości 1 lub –1, zależnie od zwrotu napięcia względem przyjętego obiegu po oczka

Po zastosowaniu do ww. równania przekształcenia Laplace'a i wykorzystaniu twierdzenia o liniowości otrzymujemy

$$\boxed{\sum_{j=1}^{J} \lambda_j\, U_j(s) = 0} \tag{15.23}$$

Równanie (15.23) wyraża **II prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej**

Algebraiczna suma transformat napięć na wszystkich elementach wchodzących w skład danego oczka schematu operatorowego jest równa zeru

Operatorowe zależności między napięciem a prądem idealnych elementów obwodu i ich modele operatorowe.

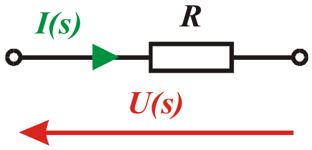
REZYSTOR

Przebiegi elektryczne napięcia i prądu rezystora o rezystancji R podlegają prawu Ohma

$$u(t) = R\,i(t)$$

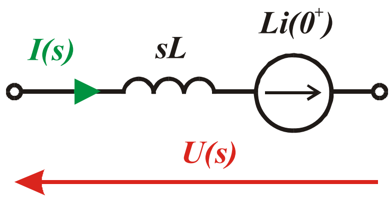
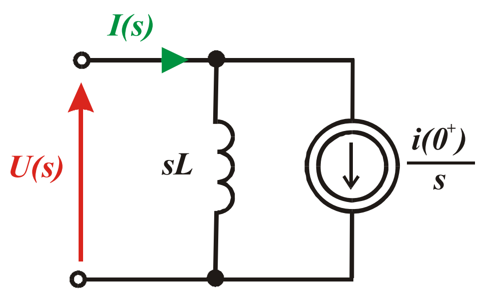
Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a i wykorzystaniu twierdzenia o liniowości tego przekształcenia otrzymujemy

$$\boxed{U(s) = R\,I(s)} \qquad \textbf{(15.24)}$$

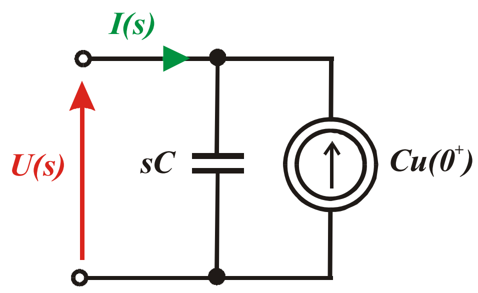
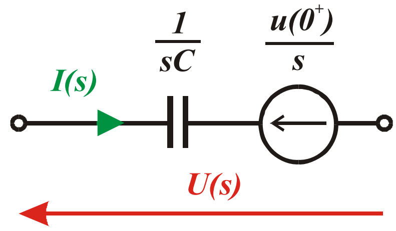


Wzór (15.24) wyraża **prawo Ohma w postaci operatorowej**. Wynika z niego, że model operatorowy rezystora jest charakteryzowany jego rezystancją R.

CEWKA

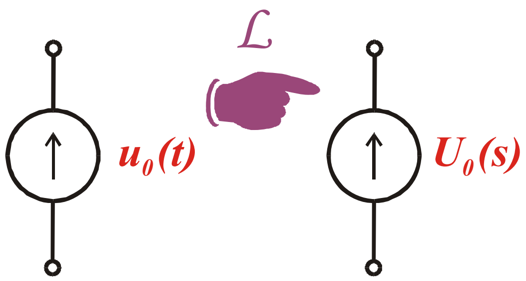
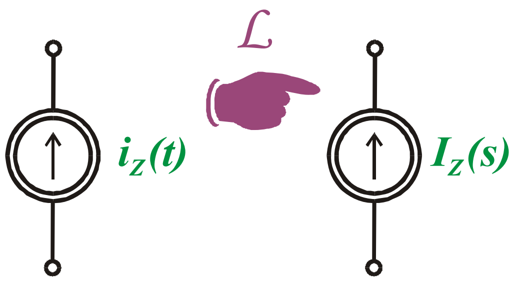
Opis w dziedzinie czasu	Opis w dziedzinie operatorowej	**Model operatorowy**
$u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$U(s) = sLI(s) - Li(0^+)$ (15.25)	
$i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int u(t)\,dt$	$I(s) = \dfrac{U(s)}{sL} + \dfrac{i(0^+)}{s}$ (15.26)	

KONDENSATOR

Opis w dziedzinie czasu	Opis w dziedzinie operatorowej	**Model operatorowy**
$i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$	$I(s) = sCU(s) - Cu(0^+)$ (15.27)	
$u(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\,dt$	$U(s) = \dfrac{I(s)}{sC} + \dfrac{u(0^+)}{s}$ (15.28)	

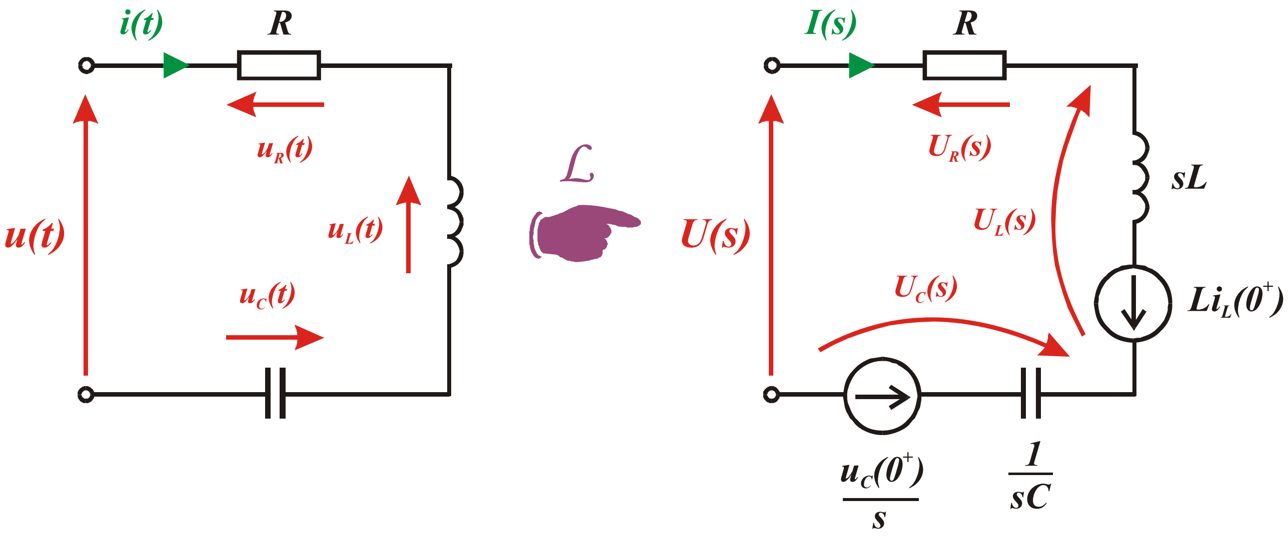
IDEALNE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA I PRĄDU

Idealne źródła napięcia i prądu w obwodzie elektrycznym charakteryzują napięcie źródłowe $u_0(t)$ lub natężenie prądu źródłowego $i_Z(t)$ - wielkości niezależne od warunków pracy odpowiednich źródeł. W schemacie operatorowym obwodu, źródła te są charakteryzowane transformatami:

napięcia źródłowego	natężenia prądu źródłowego
$U_0(s) = \mathcal{L}[u_0(t)]$ (15.29)	$I_Z(s) = \mathcal{L}[i_Z(t)]$ (15.30)
	

PRZYKŁAD 15.2

Rozpatrzmy gałąź pasywną zawierającą elementy *R*, *L*, *C*.



$$U(s)=U_R(s)+U_L(s)+U_C(s)$$

$$U(s)=RI(s)+sLI(s)-Li_L(0^+)+\frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_C(0^+)}{s}$$

$$U(s)+\left[Li_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{s}\right]=I(s)\left[R+sL+\frac{1}{sC}\right]$$

$$I(s)=\frac{U(s)+\left[Li_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{s}\right]}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{U(s)+\left[Li_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{s}\right]}{Z(s)}=$$

$$=Y(s)U(s)+Y(s)\left[Li_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{s}\right]$$

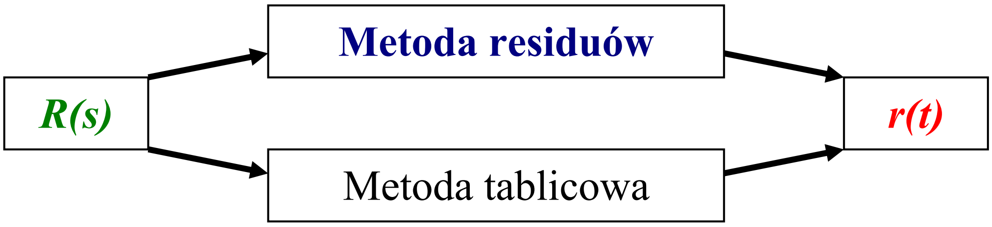
gdzie:

$$\boxed{Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}}$$ **impedancja operatorowa**

$$\boxed{Y(s)=1/Z(s)}$$ **admitancja operatorowa**

15.5.4. METODY WYZNACZANIA ORYGINAŁU FUNKCJI OPERATOROWEJ

W celu wyznaczenia funkcji czasu na podstawie danej transformaty najczęściej korzysta się z metod wynikających z własności przekształcenia Laplace'a.



METODA RESIDUÓW

Funkcja operatorowa poszukiwanej odpowiedzi *R(s)* jest, dla obwodów klasy SLS, kombinacją liniową operatorowej funkcji wymuszającej *X(s)* oraz parametrów obwodu, wyrażonych w konwencji operatorowej (R, sL, $1/sC$) a ponadto członów opisujących warunki początkowe $\{Li_L(0^+)$, $u_C(0^+)/s\}$. Jeśli funkcja operatorowa wymuszenia jest funkcją wymierną (dającą się wyrazić jako iloraz wielomianów zmiennej s), to i funkcja operatorowa odpowiedzi jest funkcją wymierną.

Powyższe rozumowanie prowadzi do stwierdzenia, że w ogólnym przypadku funkcję operatorową możemy wyrazić jako iloraz dwóch wielomianów zmiennej s

$$R(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0} = \frac{L(s)}{M(s)} \qquad (15.31)$$

Równanie algebraiczne:

L(s)=0 posiada pierwiastki: $s_1^{\,0}, s_2^{\,0} \ldots s_n^{\,0}$, które nazywamy ***zerami*** *R(s)*
M(s)=0 posiada pierwiastki: $s_1, s_2 \ldots s_m$, które nazywamy ***biegunami*** *R(s)*

Jeśli znamy zera i bieguny funkcji *R(s),* to równanie (15.31) możemy przedstawić w postaci

$$R(s) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (s - s_i^0)}{\prod_{k=1}^{m} (s - s_k)} \tag{15.32}$$

Z zapisu (15.32) wynika jednoznacznie, że zera i bieguny funkcji *R(s)* nie mogą się pokrywać. Przyjmujemy ponadto, że $n<m$ (stopień licznika jest mniejszy niż mianownika).

Przy spełnieniu ww. warunków odwrotne przekształcenie Laplace'a możemy przedstawić w postaci

$$\boxed{r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[R(s)\right] = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \underset{s=s_k}{res} \left[R(s)\, e^{s\,t}\right] \right\} \cdot 1(t)} \tag{15.33}$$

to znaczy, że oryginał poszukiwanej funkcji *r(t)* jest równy sumie residuów funkcji podcałkowej (15.14) we wszystkich biegunach s_k operatorowej funkcji odpowiedzi *R(s)*.

UWAGA:

Jeśli w wyrażeniu (15.32), w jego mianowniku wystąpią elementy postaci $s^{\,p}$ lub $(s\text{-}s_k)^{\,p}$ - oznacza to, że w punkcie 0 lub s_k występuje biegun p-krotny.

W przypadku biegunów wielokrotnych (niech w punkcie $s=s_k$ występuje biegun p-krotny) funkcji $R(s)$ residuum funkcji $R(s)e^{st}$ obliczyć należy z następującego wzoru

$$\underset{s=s_k}{res}\left[R(s)e^{st}\right]=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{s\to s_k}\left\{\frac{d^{(p-1)}}{ds^{(p-1)}}\left[(s-s_k)^p R(s)e^{st}\right]\right\} \quad \textbf{(15.34)}$$

Przykład : *Rozpatrzymy wyznaczenie $\mathcal{L}^{-1}$ transformaty funkcji*

$$R(s)=\frac{1}{(s+3)^2(s+5)}$$

Zadana funkcja ma jeden biegun 2-krotny s_1=-3 i jeden pojedynczy s_2=-5
Wykorzystując wzór (15.33), otrzymujemy

$$r(t)=\underset{s=s_1}{res}\left[R(s)e^{st}\right]+\underset{s=s_2}{res}\left[R(s)e^{st}\right]$$

Następnie wykorzystujemy zależność (15.34) i uzyskujemy

$$r(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-3}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+3)^2R(s)e^{st}\right]\right\}+\lim_{s\to-5}\left[(s+5)R(s)e^{st}\right]=$$

$$=\lim_{s\to-3}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+3)^2\frac{1}{(s+3)^2(s+5)}e^{st}\right]\right\}+\lim_{s\to-5}\left[(s+5)\frac{1}{(s+3)^2(s+5)}e^{st}\right]=$$

$$=\lim_{s\to-3}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+5}e^{st}\right)\right]+\lim_{s\to-5}\left(\frac{1}{(s+3)^2}e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-3}\left[t\frac{1}{s+5}e^{st}-\frac{1}{(s+5)^2}e^{st}\right]+\lim_{s\to-5}\left(\frac{1}{(s+3)^2}e^{st}\right)=$$

$$=t\frac{1}{-3+5}e^{-3t}-\frac{1}{(-3+5)^2}e^{-3t}+\frac{1}{(-5+3)^2}e^{-5t}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}te^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{1}{4}e^{-5t}\right)1(t)$$

W przypadku biegunów pojedynczych (jednokrotnych) funkcji $R(s)$ residuum funkcji $R(s)e^{st}$ w biegunie $s=s_k$ możemy wyznaczyć z następującego wzoru

$$\boxed{\underset{s=s_k}{res}\left[R(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to s_k}\left[(s-s_k)R(s)e^{st}\right]} \qquad \textbf{(15.35)}$$

Przykład : *Rozpatrzymy wyznaczenie* $\mathcal{L}^{-1}$ *transformaty funkcji*

$$R(s)=\frac{10s}{(s+1)(s+2)}$$

Zadana funkcja ma dwa bieguny s_1=-1 i s_2=-2

Wykorzystując wzór (15.33) otrzymujemy

$$r(t)=\underset{s=s_1}{res}\left[R(s)e^{st}\right]+\underset{s=s_2}{res}\left[R(s)e^{st}\right]$$

Na podstawie wzoru (10.35) uzyskujemy

$$\begin{aligned}
r(t) &= \lim_{s\to -1}\left[(s+1)R(s)e^{st}\right]+\lim_{s\to -2}\left[(s+2)R(s)e^{st}\right]= \\
&= \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{10s}{(s+1)(s+2)}e^{st}\right]+\lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{10s}{(s+1)(s+2)}e^{st}\right]= \\
&= \lim_{s\to -1}\left[\frac{10s}{(s+2)}e^{st}\right]+\lim_{s\to -2}\left[\frac{10s}{(s+1)}e^{st}\right]= \\
&= \frac{10\cdot(-1)}{(-1+2)}e^{-1t}+\frac{10\cdot(-2)}{(-2+1)}e^{-2t}= \\
&= (-10e^{-t}+20e^{-2t})1(t)
\end{aligned}$$

<u>UWAGA:</u>

Jeśli funkcja *R(s)* ma wyłącznie bieguny proste i <u>nie posiada</u> bieguna w zerze, bardzo wygodnym w stosowaniu przy obliczaniu oryginału jest tzw. wzór Heaviside'a, który nosi nazwę

<u>I-go twierdzenia o rozkładzie</u>

$$\boxed{r(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t} \cdot 1(t)} \qquad (15.36)$$

gdzie: *L(s$_k$)* – wartość wielomianu *L(s)* dla $s=s_k$
M'(s$_k$) – wartość pochodnej wielomianu *M(s)* dla $s=s_k$

<u>Przykład :</u> *Rozpatrzymy wyznaczenie* $\mathcal{L}^{-1}$ *transformaty funkcji*

$$R(s) = \frac{5s+108}{s^2+18s+32}$$

Zadana funkcja posiada bieguny s_1=-2 oraz s_2=-16

Pochodna wielomianu mianownika *M'(s)* = 2*s*+18

Po podstawieniu otrzymanych wartości do wzoru (15.36), wyznaczamy

$$r(t) = \frac{5(-2)+108}{2(-2)+18} e^{-2t} + \frac{5(-16)+108}{2(-16)+18} e^{-16t} =$$

$$= (7e^{-2t} - 2e^{-16t})1(t)$$

Jeśli funkcja *R(s)* ma wyłącznie bieguny proste i <u>posiada</u> biegun w zerze, to można ją przedstawić w postaci

$$R(s)=\frac{L(s)}{V(s)} \quad gdzie \quad V(s)=\frac{M(s)}{s} \tag{15.37}$$

przy czym stopień wielomianu *V(s)* wynosi *m-1*

Wówczas

$$\boxed{r(t)=\frac{L(0)}{V(0)}\cdot 1(t)+\sum_{k=1}^{m}\frac{L(s_k)}{s_k V'(s_k)}e^{s_k t}\cdot 1(t)} \tag{15.38}$$

jest to tzw. <u>**II twierdzenie o rozkładzie**</u>

gdzie: *L(0)* – wartość wielomianu *L(s)* dla *s=0*
V(0) – wartość wielomianu *V(s)* dla *s=0*
V'(s_k) – wartość pochodnej wielomianu *V(s)* dla $s=s_k$
s_k (k=1,2, ... m-1) – niezerowe bieguny transformaty

<u>***Przykład :***</u> *Rozpatrzymy wyznaczenie* $\mathcal{L}^{-1}$ *transformaty funkcji*

$$R(s)=\frac{2100}{s\left(s^2+45s+200\right)}$$

Pierwiastki wielomianu *V(s)*: s_1=-5 oraz s_2=-40

Pochodna wielomianu *V'(s)* = 2*s*+45

Ponieważ jednocześnie: *L(0)*=2100 , *V(0)*=200

to po podstawieniu obliczonych wartości do wzoru (15.38) wyznaczamy

$$r(t)=\frac{2100}{200}+\frac{2100\,e^{-5t}}{(-5)[2(-5)+45]}+\frac{2100\,e^{-40t}}{(-40)[2(-40)+45]}=$$
$$=(10{,}5-12\,e^{-5t}+1{,}5\,e^{-40t})1(t)$$

15.6. ANALIZA STANÓW NIEUSTALONYCH W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH KLASY SLS

ZAŁOŻENIA

Przyjmijmy, że:

- dany jest obwód elektryczny w dziedzinie czasu, tzn. znana jest jego struktura (schemat obwodu) oraz wartości parametrów;
- dane są funkcje wymuszające, np.: $u_{0K}(t)$, $i_{ZK}(t)$, tzn. dany jest ich opis funkcyjny bądź wykres zmienności w czasie;
- dany jest jednoznacznie czas komutacji t_K, np.: $t_K=0$;
- opisany jest jednoznacznie stan energetyczny obwodu dla $t < t_K$

15.6.1. ALGORYTM ANALIZY

Jeśli spełnione są wszystkie przedstawione powyżej założenia, wówczas metodyka postępowania w procesie analizy stanu nieustalonego z wykorzystaniem rachunku operatorowego jest ciągiem uporządkowanych następujących działań:

① Ustalamy warunki początkowe (W.P.) w oparciu o znajomość stanu obwodu dla $t < t_K$ oraz praw komutacji;

② Wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji wymuszających [$u_{0K}(t)$, $i_{ZK}(t)$] ich postać operatorową [$U_{0K}(s)$, $I_{ZK}(s)$];

③ Sporządzamy schemat operatorowy obwodu uwzględniając W.P.;

④ Dokonujemy analizy obwodu operatorowego (dowolną z poznanych metod analizy) i wyznaczamy postać operatorową poszukiwanej bądź poszukiwanych wielkości [$R(s)$];

⑤ Znajdujemy oryginał poszukiwanej bądź poszukiwanych wielkości [$r(t)$] i ewentualnie sporządzamy wykres zmienności tej wielkości.

WYJAŚNIENIE POJĘCIA

RZĄD OBWODU

- **Obwody SLS rzędu pierwszego** – obwody opisane równaniami różniczkowymi rzędu pierwszego.
  Obwody takie mają tylko jeden element inercyjny.

- **Obwody SLS wyższych rzędów**– obwody opisane równaniami różniczkowymi rzędu wyższego niż pierwszy.
  Obwody takie zawierają więcej niż jeden element inercyjny.

Rozważmy szeregowy obwód RLC, do którego w chwili t=0 zostaje dołączona siła elektromotoryczna *e*. Równanie obwodu dla t>0 ma postać

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_0 = e$$

Wiedząc, że

$$i = C\frac{du_C}{dt} \qquad \text{oraz} \qquad u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_0$$

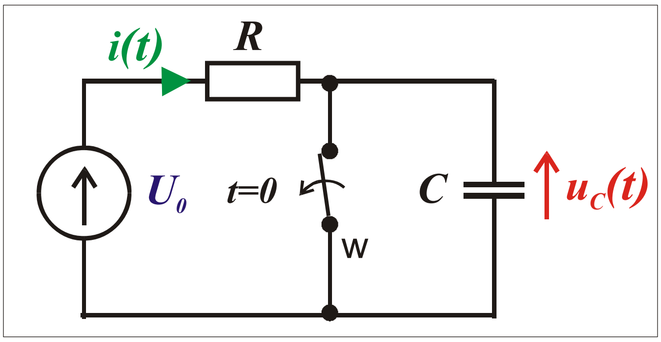
otrzymujemy

$$RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt} + u_C = e$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

15.6.2. OBWODY PIERWSZEGO RZĘDU

Rozpatrzymy stan nieustalony w obwodzie szeregowym *RC*. W chwili t=0 otwarto wyłącznik *W*. Wyznaczyć przebieg prądu, jeżeli $u(t)=U_0$=10V, R=100Ω, C=2mF.



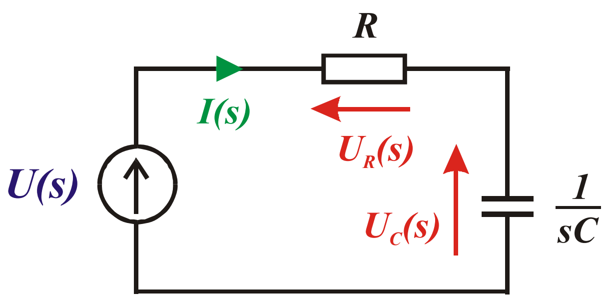
① *Ustalamy warunki początkowe (W.P.) w oparciu o znajomość stanu obwodu dla $t < t_K$ oraz praw komutacji :*

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

② *Wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji wymuszającej jej postać operatorową :*

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right] = \mathcal{L}\left[U_0\right] = \frac{U_0}{s}$$

③ *Sporządzamy schemat operatorowy obwodu uwzględniając W.P.*



④ *Dokonujemy analizy obwodu operatorowego i wyznaczamy postać operatorową poszukiwanej wielkości.*

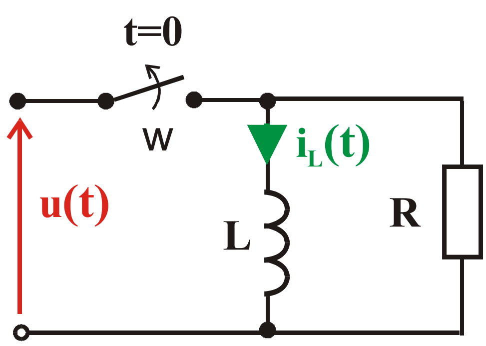
Zgodnie z prawem Ohma: $I(s) = \dfrac{U_0}{s\left(R + \dfrac{1}{sC}\right)} = \dfrac{U_0}{R\left(s + \dfrac{1}{RC}\right)} = \dfrac{0,1}{s+5}$

⑤ *Znajdujemy oryginał poszukiwanej wielkości.*

Na podstawie tabeli (lp.5): $i(t) = 0,1 e^{-5t} 1(t)$

PRZYKŁAD 15.3: W chwili t=0 otwarto wyłącznik W. Narysować przebieg prądu cewki przed i po tej chwili. Obliczyć prąd w cewce po 3ms od chwili otwarcia W.

Dane:
dla t<0 w układzie panował stan ustalony,
L = 0,1 H, R = 10 Ω.
u(t) = 157 sin(314t+120°),



① *Ustalamy warunki początkowe (W.P.) w oparciu o znajomość stanu obwodu dla $t < t_K$ oraz praw komutacji :*

$$\underline{U}_m = 157\, e^{j120}$$

$$\underline{I}_{mL} = \frac{\underline{U}_m}{j\omega L} = \frac{U_m\, e^{j\Psi}}{\omega L\, e^{j90}} = \frac{U_m}{\omega L} e^{j(\Psi - 90)} = 5\, e^{j30}$$

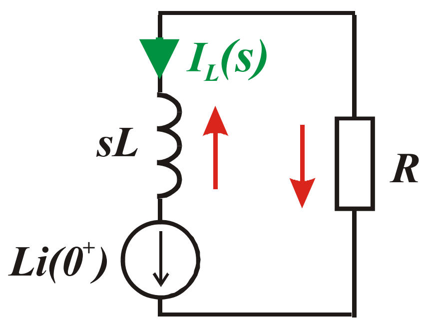
dla t < 0 $\quad i_L(t) = 5\sin\left(314t + 30^0\right)$

dla t = 0 $\quad i_L(0) = 5\sin 30^0 = 2{,}5$

zatem $\quad i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right) = 2{,}5$

② *Wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji wymuszającej jej postać operatorową* : BRAK

③ *Sporządzamy schemat operatorowy obwodu uwzględniając W.P.*



④ *Dokonujemy analizy obwodu operatorowego i wyznaczamy postać operatorową poszukiwanej wielkości.*

Zgdonie z NPK: $sL\, I_L(s) + R\, I_L(s) = Li(0^+)$

$$I_L(s)\,[sL+R] = Li(0^+)$$

$$I_L(s) = \frac{Li(0^+)}{sL+R} = Li(0^+)\frac{1}{sL+R} = Li(0^+)\frac{1}{L\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

$$I_L(s) = i(0^+)\frac{1}{s+\frac{R}{L}} = 2{,}5\frac{1}{s+100}$$

⑤ *Znajdujemy oryginał poszukiwanej wielkości.*

$$i_L(t) = \left\{\sum_{k=1}^{m} \underset{s=s_k}{res}\left[I_L(s)e^{st}\right]\right\}\cdot 1(t)$$

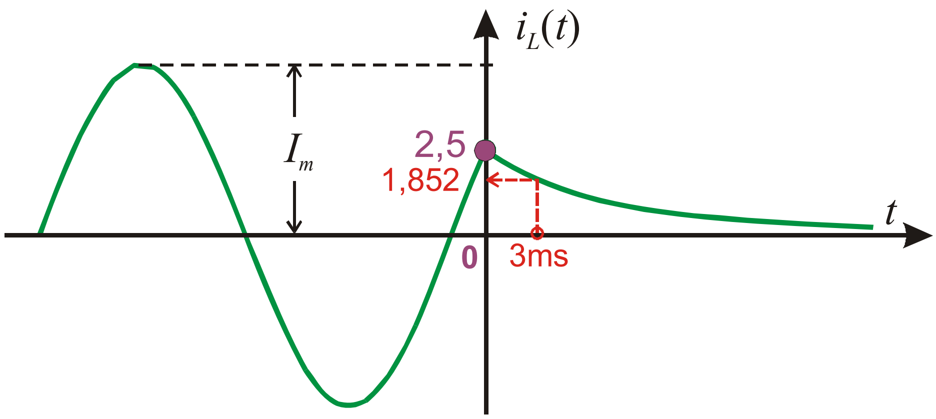
$$i_L(t) = \left\{\lim_{s\to s_k}\left[(s-s_k)I_L(s)e^{st}\right]\right\}\cdot 1(t) =$$

$$= \left\{\lim_{s\to -100}\left[(s+100)\frac{2{,}5}{(s+100)}e^{st}\right]\right\}\cdot 1(t) = \left\{\lim_{s\to -100}\left[2{,}5\ e^{st}\right]\right\}\cdot 1(t) =$$

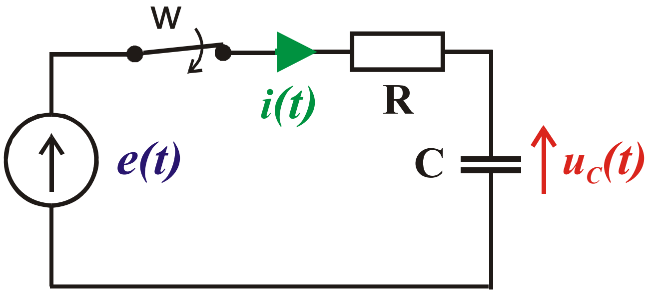
$$= 2{,}5\,e^{-100t}\ 1(t)$$

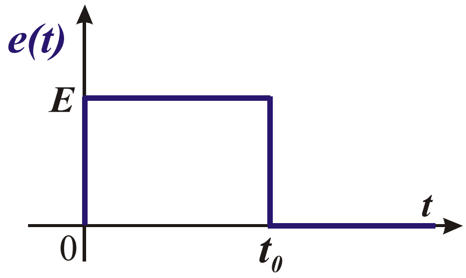
CZYLI:

dla t < 0	dla t = 0	dla t > 0
$i_L(t) = 5\sin(314t + 30^0)$	2,5	$i_L(t) = 2{,}5\,e^{-100t}$



PRZYKŁAD 15.4: W chwili t=0 zamknięto wyłącznik W. Wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na kondensatorze.

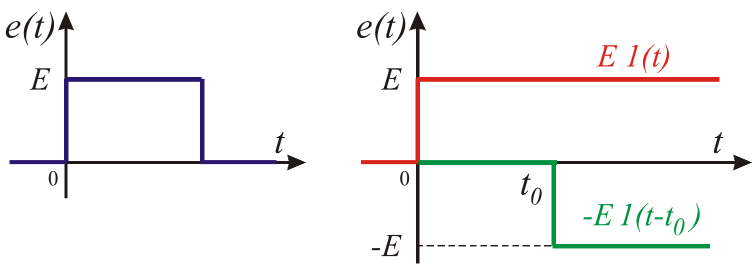




① *Ustalamy warunki początkowe (W.P.) w oparciu o znajomość stanu obwodu dla $t < t_K$ oraz praw komutacji :*

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

② *Wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji wymuszającej jej postać operatorową :*



$$e(t) = E \cdot 1(t) - E \cdot 1(t - t_0)$$

Wiemy, że $\mathcal{L}\left[E \cdot 1(t)\right] = \dfrac{E}{s}$

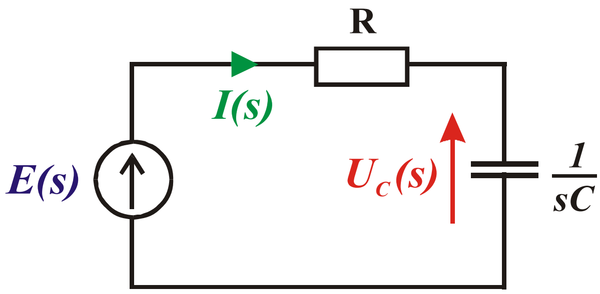
Czyli zgodnie z twierdzeniem o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$Gdy \quad \mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \quad to \quad \mathcal{L}\left[f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)\right] = F(s)\, e^{-s t_0}$$

i liniowości napiszemy:

$$E(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s} e^{-s t_0} = \frac{E}{s}\left(1 - e^{-s t_0}\right)$$

③ *Sporządzamy schemat operatorowy obwodu uwzględniając W.P.*



④ *Dokonujemy analizy obwodu operatorowego i wyznaczamy postać operatorową poszukiwanej wielkości.*

Operatorowy prąd obwodu:

$$I(s)=\frac{E(s)}{R+\dfrac{1}{sC}}\;\frac{/\cdot s}{/\cdot s}=\frac{s\,E(s)}{s\,R+\dfrac{1}{C}}=\frac{s\,E(s)}{R\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}=\frac{s\,\dfrac{E}{s}\left(1-e^{-s\,t_0}\right)}{R\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}$$

$$=\frac{E}{R}\;\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}\;\left(1-e^{-s\,t_0}\right)=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}e^{-s\,t_0}\right]$$

Operatorowe napięcie na zaciskach kondensatora:

$$U_C(s)=I(s)\frac{1}{sC}=\frac{1}{sC}\,\frac{E}{R}\left[\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}e^{-s\,t_0}\right]$$

$$=\frac{E}{RC}\left[\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}-\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}e^{-s\,t_0}\right]$$

⑤ *Znajdujemy oryginał poszukiwanej wielkości.*

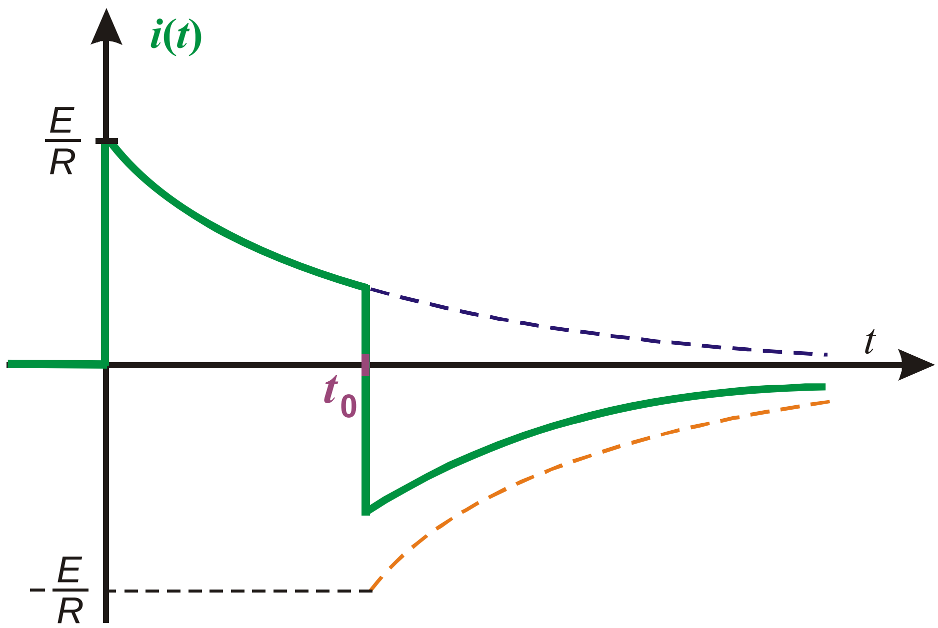
$$I(s) = \frac{E}{R}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}e^{-st_0}\right]$$

Metoda tablicowa	**Poz. 5**	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Czyli:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[\, e^{-\frac{1}{RC}t}\,1(t) \; - \; e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\,1(t-t_0)\right]$$

$$i(t) = \underbrace{\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}\,1(t)} - \underbrace{\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\,1(t-t_0)}$$

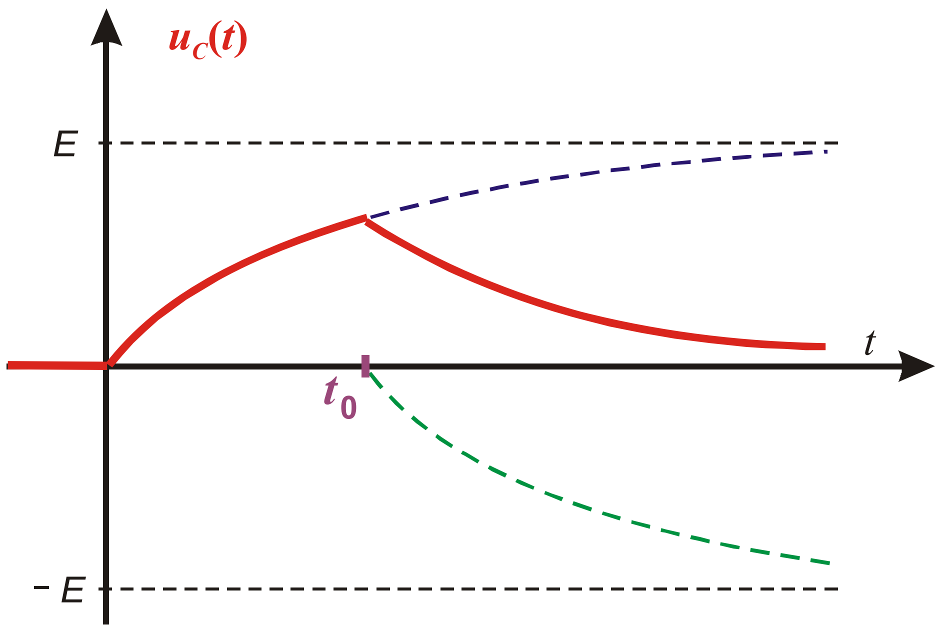


$$U_C(s)=\frac{E}{RC}\left[\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}-\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}e^{-st_0}\right]$$

Metoda tablicowa	**Poz. 9**	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$

$$u_C(t)=\frac{E}{RC}\left[RC\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)1(t)-RC\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)1(t-t_0)\right]$$

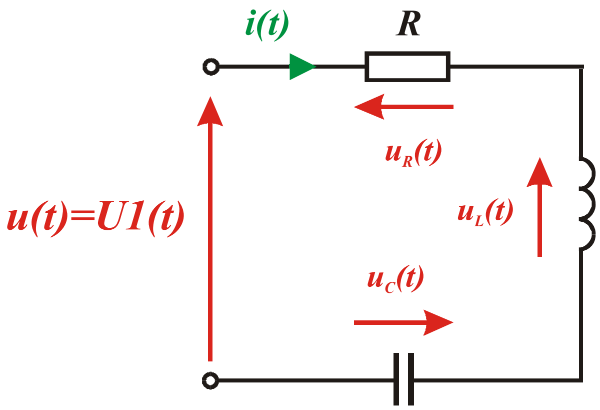
$$u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)1(t)-E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)1(t-t_0)$$



15.6.3. OBWODY DRUGIEGO RZĘDU

Najprostszym reprezentantem takich obwodów jest obwód szeregowy *RLC*.

Załóżmy, że napięcie działające na zaciskach takiego obwodu jest wymuszeniem napięciowym opisanym funkcją stałą i przyczynową $u(t)=U1(t)$. Przyjmijmy, że poszukujemy funkcji prądu $i(t)$.



① *Ustalamy warunki początkowe (W.P.) w oparciu o znajomość stanu obwodu dla $t < t_K$ oraz praw komutacji :*

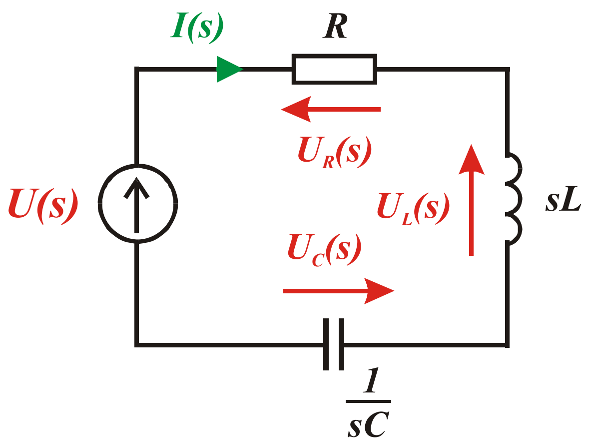
Warunki początkowe z uwagi na fakt, że dla $t<0$ $U=0$ możemy zgodnie z I i II prawem komutacji napisać

$$\left.\begin{aligned} i_L(0^-) &= i_L(0^+) = 0 \\ u_C(0^-) &= u_C(0^+) = 0 \end{aligned}\right\}$$

② *Wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji wymuszającej jej postać operatorową :*

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right] = \mathcal{L}\left[U_0\right] = \frac{U_0}{s}$$

③ *Sporządzamy schemat operatorowy obwodu uwzględniając W.P.*



④ *Dokonujemy analizy obwodu operatorowego i wyznaczamy postać operatorową poszukiwanej wielkości.*

Prąd w obwodzie możemy wyznaczyć zgodnie z prawem Ohma

$$I(s)=\frac{U(s)}{Z(s)}=\frac{\frac{U}{s}}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{U}{L}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

⑤ *Znajdujemy oryginał poszukiwanej wielkości.*

Równanie opisujące prąd w obwodzie jest funkcją wymierną

$$I(s)=\frac{U}{L}\cdot\frac{L(s)}{M(s)}$$

W celu wyznaczenia transformaty odwrotnej należy obliczyć pierwiastki mianownika *I*(s), czyli

$$M(s)=s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

W wyniku rozwiązania powyższego równania otrzymujemy bieguny operatorowej funkcji prądu

$$\left.\begin{aligned} s_1&=\frac{-\frac{R}{L}+\sqrt{\Delta}}{2}\\ s_2&=\frac{-\frac{R}{L}-\sqrt{\Delta}}{2}\end{aligned}\right\}$$

gdzie $\Delta=\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}$ (*)

jest wyróżnikiem *M(s)*

Możliwe są **trzy przypadki rozwiązania**:

A) $\boldsymbol{\Delta > 0}$ – dwa pierwiastki rzeczywiste *M(s)*
$\rightarrow$ oznacza **dwa bieguny pojedyncze** *I(s)*

B) $\boldsymbol{\Delta = 0}$ – jeden pierwiastek podwójny *M(s)*
$\rightarrow$ oznacza **jeden biegun dwukrotny** *I(s)*

C) $\boldsymbol{\Delta < 0}$ – dwa pierwiastki zespolone-sprzężone *M(s)*
$\rightarrow$ oznacza **dwa bieguny zespolone-sprzężone** *I(s)*

Z zależności (*) wynika, że:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta > 0 & gdy & R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \Delta = 0 & gdy & R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \Delta < 0 & gdy & R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{array}\right\}$$

Rozważymy teraz możliwe przypadki rozwiązania

Przypadek A - APERIODYCZNY

Oba bieguny są rzeczywiste:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned}\right\}$$

przebieg czasowy prądu:

$$i_A(t) = \frac{U}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}\left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right] =$$

$$= \frac{U}{L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} sh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)$$

Przypadek B – APERIODYCZNY-KRYTYCZNY

Jeden biegun dwukrotny:

$$s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L}$$

Przebieg czasowy prądu:

$$i_B(t) = \frac{U}{L} t\, e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Przypadek C – OCYLACYJNY

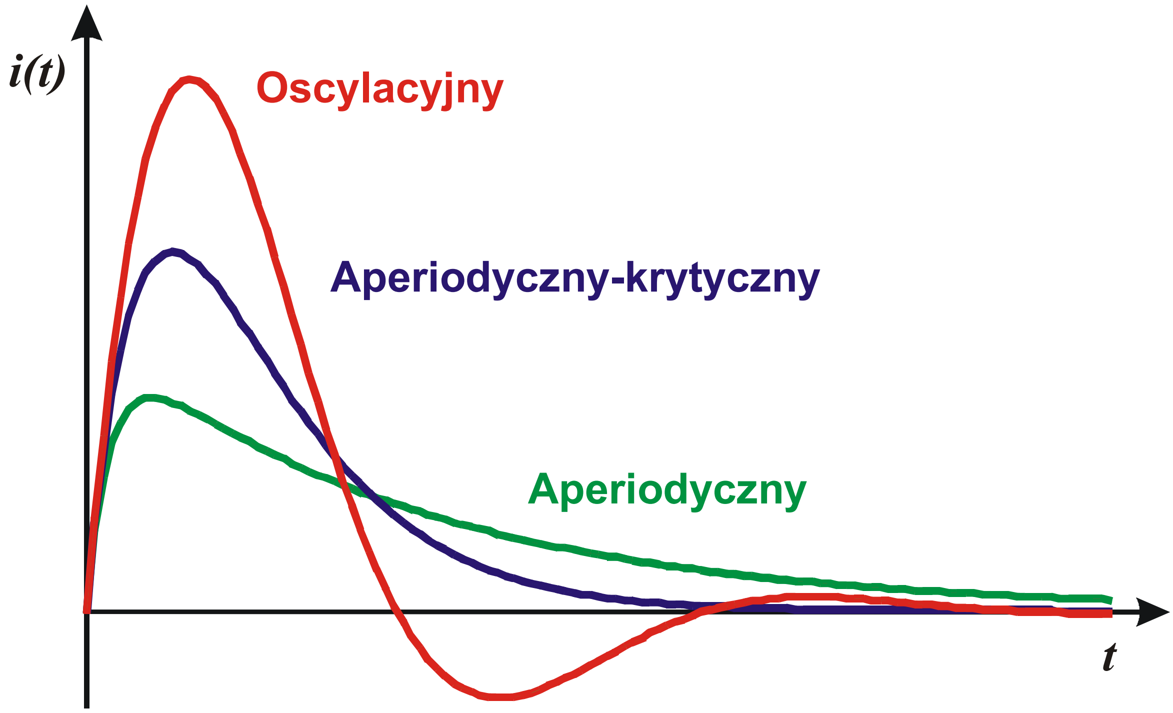
Dwa bieguny zespolone-sprzężone:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{aligned}\right\}$$

Przebieg czasowy prądu:

$$i_C(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t)$$

$$gdzie \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



Przebiegi czasowe wyznaczonych prądów

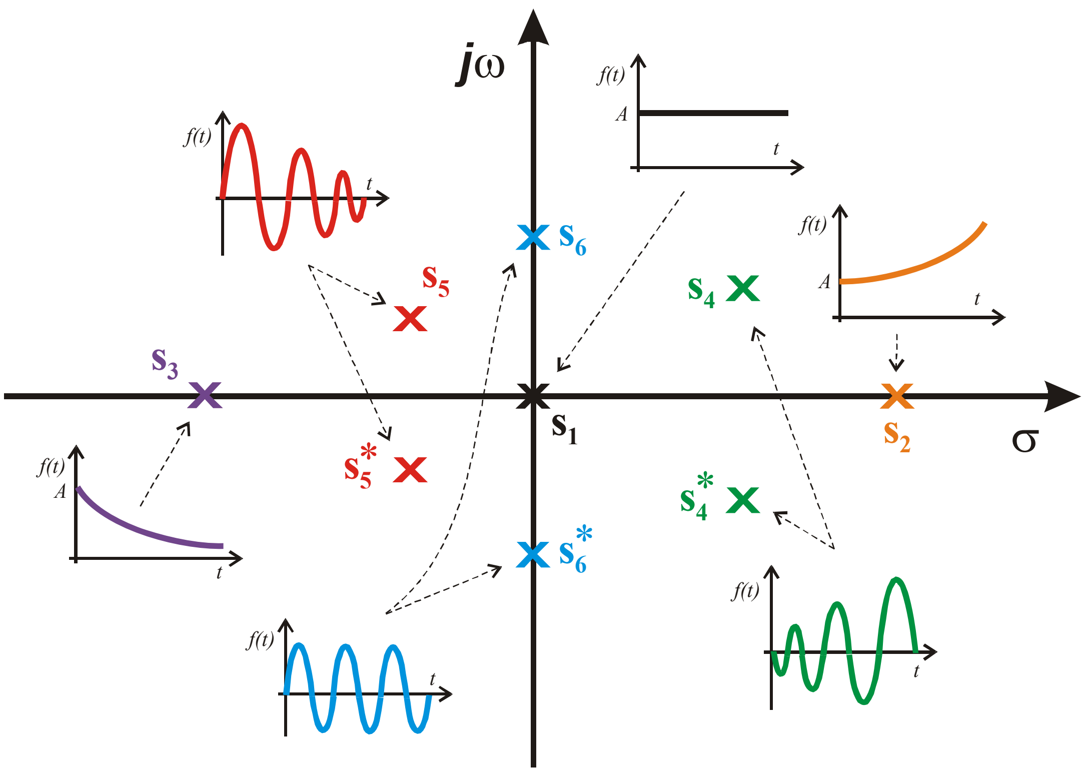
dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

15.6.4. WNIOSKI

Na podstawie dotychczas omówionych przykładów jesteśmy w stanie sformułować wnioski dotyczące **zależności pomiędzy położeniem bieguna s_K operatorowej funkcji odpowiedzi *R(s)* a jej funkcją czasu *r(t)*.**

Załóżmy, że wielomian mianownika *M(s)* funkcji operatorowej *R(s)* nie posiada pierwiastków wielokrotnych a jedynie pojedyncze, np.:

BIEGUN		FUNKCJA CZASU PRZYPORZĄDKOWANA BIEGUNOWI
$s_1 = 0$	$\rightarrow$	$A\,1(t)$
$s_2 = a \quad (a > 0)$	$\rightarrow$	$A\,e^{at}\,1(t)$
$s_3 = a \quad (a < 0)$	$\rightarrow$	$A\,e^{-\lvert a\rvert t}\,1(t)$
$s_4 = (a + j\omega), s_4^* = (a - j\omega), \quad (a > 0)$	$\rightarrow$	$A\,e^{-at}\sin\omega t\,1(t)$
$s_5 = (a + j\omega), s_5^* = (a - j\omega), \quad (a < 0)$	$\rightarrow$	$A\,e^{-\lvert a\rvert t}\sin\omega t\,1(t)$
$s_6 = +j\omega, s_6^* = -j\omega$	$\rightarrow$	$A\sin\omega t\,1(t)$



Zależność *r(t)* od biegunów *R(s)* na płaszczyźnie *s*